ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ
ГИМНАЗИЯ № 1 ГОРОДА НОВОКУЙБЫШЕВСКА
ГОРОДСКОГО ОКРУГА НОВОКУЙБЫШЕВСК САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ
(ГБОУ гимназия № 1 г. Новокуйбышевска)

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

по математике для учащихся 10 классов

« Встречи с модулем»

Чублукова Екатерина Владимировна
учитель математики
ГБОУ гимназия №1
г. Новокуйбышевска

г. Новокуйбышевск, 2012 год

I. Пояснительная записка.

В старших классах важную роль в решении задач профильного обучения должны сыграть элективные курсы. Основными задачами курсов на данном этапе обучения являются:

во-первых, поддержание интереса у школьников к той или иной дисциплине;

во-вторых, выявление средствами предмета направленности личности, ее профессиональных интересов, для того чтобы профессиональное самоопределение старшеклассников было осознанным и обоснованным.

Среди школьных предметов математика занимает совершенно особое место. Математика используется в самых разнообразных профессиях - инженер, военный, биолог, конструктор, программист и др. Для одной профессии она нужна больше, для другой - меньше, но все равно нужна. Элективные курсы по математике дают возможность проверить и оценить учащимся свои способности к математике, ориентацию на профессию и повысят вероятность того, что выпускник сделает осознанный и успешный выбор дальнейшего профессионального обучения, ответив на вопрос: «Сумеет ли он серьезно заниматься математикой?».

Одна из основных целей курсов по математике в системе профильной подготовки - выявление средствами предмета направленности личности, ее профессиональных интересов.

Другой важнейшей задачей курса является поддержание интереса к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам.

Математика (как и русский язык) – предмет, изучающийся с первого по выпускной класс. Объем содержательных единиц, которыми должен оперировать старшеклассник по данному предмету, чрезвычайно велик. Следовательно, велик и объем накопившихся у учащихся за годы обучения пробелов.

Элективный курс «Встречи с модулем» поможет повысить уровень математической подготовки через решение большого класса задач, содержащих модуль, то есть повысит качество образования за счет углубления отдельных тем базовых общеобразовательных программ по математике.

Элективный курс «Встречи с модулем» разработан и предназначен для организации систематического изучения вопросов, связанных с модулем. Он рассчитан на учащихся с любой математической подготовкой. Целью этого элективного курса является знакомство учащихся с математикой как с общекультурной ценностью, выработка понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя.

В школьной программе понятие модуля вводиться в 6 классе, и впоследствии учащиеся лишь эпизодически встречаются с заданиями, содержащими модуль. Часто ученики такое задание воспринимают как новое и неожиданное и не знают, с какой стороны к нему подступиться. На базовом уровне учащиеся должны уметь выполнять задания стандартного вида (одношаговые). В процессе же изучения курса старшеклассники смогут познакомиться с различными приемами построения графиков функций, решениями уравнений и неравенств с модулем, приобретут навыки рационального поиска решения задач и построения алгоритмов, а в дальнейшем применят полученные знания и умения при подготовке к ЕГЭ, поступлению в вуз и продолжению образованию.

Так как основу данного курса составляют решения разных по степени важности и трудности задач, то он способен повысить познавательный интерес учащихся к математике.

В процессе преподавания может быть решен вопрос и о более глубоком понимании учеником логики математического мышления. «Логика есть искусство, которое упорядочивает и связывает мысли. Люди ошибаются именно потому, что им недостает логики», - Г.Лейбниц. Очень важно показать, что при решении разного рода «нематематических» проблем может помочь следование этой логике. Например, в рассуждениях, касающихся политики и даже обыденной жизни, в развитии и логическом построении речи и вообще в способности к критическому восприятию действительности.

Таким образом, элективный курс «Встречи с модулем» призван обеспечить углубленное изучение отдельных разделов математики, повысить уровень математического мышления и сформировать навыки исследовательской деятельности.

II. Структура и содержание учебного курса.

Элективный курс «Встречи с модулем» рассчитан на **1 полугодие 10 класса**.

Курс представлен в виде **4-х разделов**:

- Определение и свойства модуля.
- Графики функции, содержащие знак модуля.
- Уравнения, содержащие модуль.
- Неравенства со знаком модуля.

Целями элективного курса «Встречи с модулем» являются:

- прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений по теме «модуль», которые учащиеся могли бы применить в нестандартных ситуациях;

- развитие конструктивного и алгоритмического мышления;

-совершенствование коммуникативных способностей на основе;

-профессиональное самоопределение старшеклассников;

обеспечить равный доступ к полноценному образованию разным категориям учащихся в соответствии с их способностями и индивидуальными склонностями и потребностями.

Задачи курса:

повышение математической культуры учеников систематизация теоретических знаний учащихся, связанных с понятием модуль;

формирование практических навыков и умений у учащихся при построении графиков функций, решении уравнений и неравенств, содержащих модуль, с использованием различных методов и приемов;

формирование творческого мышления;

подготовка учащихся к поступлению в вуз и продолжению образованию.

Принципы, положенные в основу построения элективного курса

Содержание программы элективного курса «Встречи с модулем» включает теоретический практический материал. Теоретическое содержание составляют основные понятия, способы решения задач и их обоснование. Практическое содержание-это практикум по решению задач различных типов, разного уровня сложности.

Формирование готовности к профессиональному самоопределению происходит на основе профессионального интереса, который проявляется в старших классах, когда учебно-профессиональная деятельность школьников становиться ведущей. Основой для формирования профессионального интереса как необходимого условия профильного обучения является познавательный интерес, его упрочение и специализация.

Знакомство с понятием модуля происходит в курсе математике в шестом классе, где дается его геометрическое толкование. В курсе алгебры 7-11класса происходит фрагментарное обращение к теме «Модуль», так как учебники алгебры под редакцией А.Г. Мордковича и др., алгебры и начала анализа под редакцией того же автора содержат лишь задачный материал, связанный с понятием модуля. В то время, как контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике предъявляют очень высокие требования к уровню владения выпускниками приемами «работы с модулем». Поэтому 70% времени элективного курса отводятся на практические занятия.

Предлагаемый курс является развитием системы, ранее приобретенных программных знаний. Цель данного учебного курса создать целостное представление о теме и значительно расширить спектр задач, посильных для учащихся. Всё должно располагать к самостоятельному поиску и повышать интерес к изучению предмета. Предоставляя возможность осмыслить свойства и их доказательства, учитель развивает математическую интуицию, без которой немыслимо творчество.

Организация занятий должна несколько отличаться от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать гипотезы. В курсе заложена возможность дифференцированного обучения. В решении ряда задач необходимо рассмотреть несколько способов.

Занятия по данному курсу проходят дистанционно. Для воплощения целей и задач курса целесообразно применять технологии, включающие учащихся в активную учебно-познавательную деятельность, обеспечивающие личностное развитие каждого ученика.

Технологии обучения:

Дистанционное обучение. Каждый раздел изучается 4 недели. Ребята разбирают теоретический материал, затем выполняется практическое задание, которое предоставлено после каждого раздела. Информационно-коммуникационные технологии; использование исследовательского метода, направленного на развитие логического мышления.

Позиция педагога: при проведении занятий данного элективного курса он выступает информатором только в тех случаях, когда является единственным обладателем информации. Проводит консультации. Большую часть учебного времени учитель выполняет функции советника, консультанта, поддерживающего интеллектуальную активность учащихся, и наблюдателя за процессом практической работы учеников.

Учебно-тематическое планирование

Тема	Количество часов:				Формы контроля
	Всего	Аудиторных	Внеаудиторных	В т.ч. на самостоятельную деятельность	
Определение и свойства модуля.	1	1			
Построение графиков функций, содержащих модули.	2	1	1	1	Самостоятельная работа
Уравнения, содержащие модули.	4	2	2	2	Самостоятельная работа
Решение неравенств, используя определение модуля.	3	2	1	1	Самостоятельная работа
Решение неравенств методом возведения в квадрат.	3	2	1	1	Самостоятельная работа
Решение неравенств методом замены переменных.	3	2	1	1	Самостоятельная работа
Итоговое занятие	1				Зачёт
ИТОГО					17

Содержание курса

1.Определение и свойства модуля.

Обобщение теоретических знаний, связанных с понятием модуля. Аналитическое определение и геометрический смысл модуля. Свойства модуля. Преобразования различных выражений, содержащих знак модуля на основе его определения. Использование математической символики. Знаки совокупности и системы.

Практическая работа: преобразование выражений, содержащих знак модуля, с использованием приема «разбиения на промежутки».

Модулем $|a|$ действительного числа а называется число а, если а положительно или равно нулю, и число –а, если а отрицательно, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, если a \geq 0 \\ -a, если a \prec 0 \end{cases}$$

В ходе занятия учащиеся должны изучить основные свойства модуля:

1. $|a| \geq 0$ для любого значения а.
2. $|a| = |-a|$ для любого значения а.

3. $|a \cdot в| = |a| \cdot |в|$ для любых значений а и в.

4. $\left|\frac{a}{в}\right| = \frac{|a|}{|в|}$ для любых значений а и для любых значений в отличных от нуля.

5. $\sqrt{a^2} = |a|$.

6. $\sqrt[2к]{a^{2к}} = |a|$

При преобразовании выражений, содержащих неизвестное под знаком модуля, используется так называемый прием « разбиения на промежутки», основанный на раскрытии модуля по определению.

<u>Пример1.</u> Раскрыть модуль: 13-2$|x|$.

Решение: Согласно определению модуля, выражение $|x|$ раскрывается по-разному в случае, когда $x \geq 0$ и когда $x \prec 0$. Поэтому выражение 13-2$|x|$ также будет иметь разный вид в зависимости от значения неизвестного х

$$13 - 2|x| = 13 + 2x\text{, если } x \prec 0,$$

$$13 - 2|x| = 13 - 2x\text{, если } x \geq 0.$$

Ответ: 13-2$|x|$ = $\begin{cases} 13 + 2x, если x \prec 0; \\ 13 - 2x, если x \geq 0. \end{cases}$

<u>Пример 2.</u> Раскрыть модуль: $|3 - 2x|$.

Решение. Под знаком модуля стоит выражение 3-2х. В таком случае модуль раскрывается в зависимости от знака выражения 3-2х. Поступим следующим образом:

1) найдем то значение х, при котором выражение стоящее под знаком модуля, обращается в нуль:

3-2х=0 откуда

х=1,5;

2) разобьем числовую прямую найденной точкой х=1,5 на два промежутка:

(I) х<1,5 и (II) $x \geq 1,5$;

3) на каждом из полученных промежутков определим знак выражения, стоящего под знаком модуля, и раскроем модуль:

I. Если х<1,5 , то 3-2х>0 и $|3 - 2x| = 3 - 2x$.

II. Если $x \geq 1,5$, то $3 - 2x \leq 0$ и $|3 - 2x| = -(3 - 2x) = -3 + 2x = 2x - 3$.

Заметим, что граничную точку х=1,5 можно включить в любой из промежутков.

Ответ: $|3 - 2x|$ = $\begin{cases} 3 - 2x, если x \prec 1,5; \\ 2x - 3, если x \geq 1,5 \end{cases}$

<u>Вывод:</u>

Чтобы преобразовать выражение вида $|f(x)|$, нужно использовать алгоритм:

1) найти нули функции у=f(х): $x_1 \angle x_2, \angle ... \angle x_n$

2) разбить область определения функции найденными точками на промежутки:

I. $x \le x_1$,

II. $x_1 \prec x \le x_2$,

………………..

N. $x_{n-1} \prec x \le x_n$,

N+1. $x \succ x_n$

3) на каждом промежутке определить знак выражения f(x), соответственно чему и раскрыть модуль;
4) собрать результаты, полученные на каждом промежутке, и записать ответ.

<u>Пример 3.</u> Раскрыть модуль:

$$\left|x^2 - 2|x| - 3\right|.$$

Решение. Если выражение содержит один модуль в другом, то сначала раскрывают внутренний модуль, затем-внешний.

1. раскроем внутренний модуль выражения:

$$\left|x^2 - 2|x| - 3\right| = \left\{\begin{array}{l}\left|x^2 - 2x - 3\right|, если x \ge 0 \\ \hline \left|x^2 + 2x - 3\right|, если x \prec 0\end{array}\right. .$$

2. раскроем каждый из полученных внешних модулей на соответствующих промежутках:

раскроем модуль $\left|x^2 - 2x - 3\right| при x \ge 0.$

1.нули функции y= $x^2 - 2x - 3$: x= -1 и x=3, но только 3 принадлежит взятому промежутку;
2. промежуток $x \ge 0$ разбивается точкой 3 на два промежутка $0 \le x \prec 3$ и $x \ge 3$.

3. определим знак выражения $x^2 - 2x - 3$ на каждом из промежутков и раскроем модуль:

если $0 \le x \prec 3$, то $x^2 - 2x - 3$<0 и $\left|x^2 - 2x - 3\right| = -x^2 + 2x + 3$;

если $x \ge 3$, то $x^2 - 2x - 3 \succ 0$ и $\left|x^2 - 2x - 3\right| = x^2 - 2x - 3$.

раскроем модуль $\left|x^2 + 2x - 3\right|$ при x<0.

1) нули функции y= $x^2 + 2x - 3$; x= -3, x=1; но только -3 принадлежит рассматриваемому промежутку.
2) Промежуток x<0 разбивается точкой -3 на два промежутка $x \le -3$ и $-3 \prec x \prec 0$.
3) Определим знак выражения $x^2 + 2x - 3$ на каждом из полученных промежутков и раскроем модуль:

Если $x \le -3$, то $x^2 + 2x - 3 \succ 0$ и $\left|x^2 + 2x - 3\right| = \left|x^2 + 2x - 3\right|$;

Если $-3 \prec x \prec 0$, то $x^2 + 2x - 3 \prec 0$ и $\left|x^2 + 2x - 3\right| = -x^2 - 2x + 3$.

Собрав воедино полученные на каждом промежутке результаты, запишем ответ:

$$\left|x^2-2|x|-3\right|=\begin{cases} x^2+2x-3, если x\le -3 \\ -x^2-2x+3, если -3\prec x\prec 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+2x+3, если 0\le x\prec 3 \\ x^2-2x-3, если x\ge 3 \end{cases}$$

<u>Вывод:</u> в общем случае получаем:

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), если x\ge 0 \\ f(-x), если x\prec 0 \end{cases} \qquad |f(x)|=\begin{cases} f(x), если f(x)\ge 0 \\ -f(x), если f(x)\prec 0 \end{cases}$$

Для закрепления изученного материала, для самостоятельного решения, предлагаю выполнить следующие задания:

<u>Раскройте модуль:</u>

I. $|x-1|$

$|x^2|+3|x|+2$

$x-|x|$

$\dfrac{x+3|x|}{|x|}$

$|x|^2-6|x|-7$

II. $|x^2-4x+3|$

$|x^2-2x-3|+x^2+2x$

III. $|4-x|+|x+5|-2x$

$|x^2-5x+4|-|x^2+5x+4|$

$|x^2-4|-|1-x|$

IV. $\left|x^2+|x|\right|$

$\left|x^2-2|x|\right|-3$

$\left|\left||x-1|-2\right|-3\right|$

2.Построение графиков функций, содержащих модули.

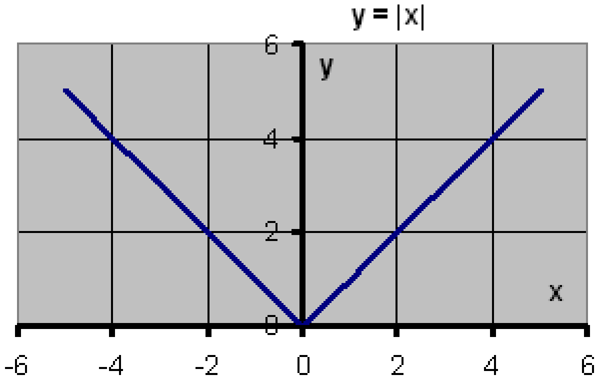
Принципы построения графиков функций с модулем:

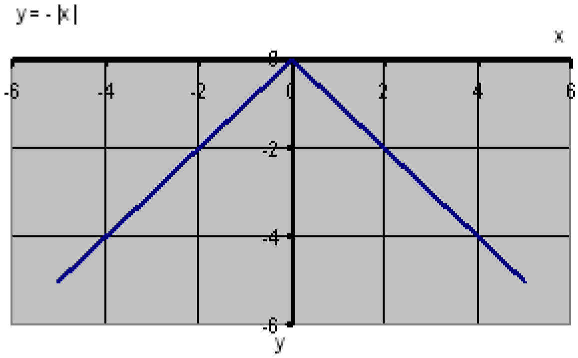
Практическое задание: построение графика выбранной функции.

Графиком функции y = |x| есть прямой угол с вершиной в т.(0,0), т.к. функция определена на множестве всех действительных чисел,

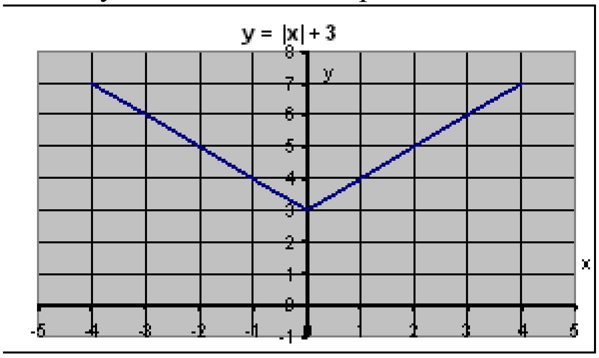
т.к. $|x|=\begin{cases} x, если\ x\ge 0 \\ -x, если\ x<0 \end{cases}$, то при $x \geq 0$ получаем функцию y = x – биссектриса 1 координатного угла, а при x < 0 получаем функцию y = – x – биссектриса 2 координатного угла.

Графиком функции $y = -|x|$ является прямой угол с вершиной в т. (0,0), но стороны угла направлены вниз.

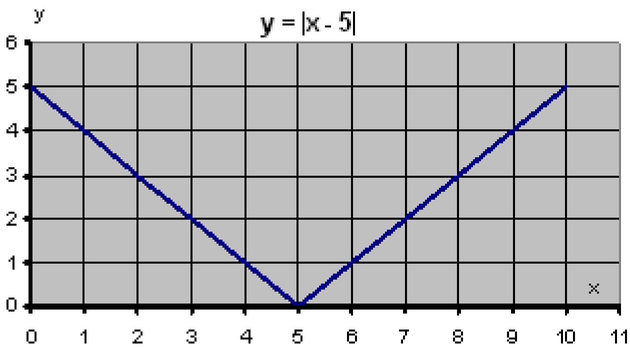




Для построения графика функции $y = |x| + 3$ график функции $y = |x|$ нужно сдвинуть по оси y на 3 единицы вверх.



Для построения графика функции $y = |x - 5|$ график функции $y = |x|$ нужно сдвинуть по оси x на 5 единиц вправо.



Для построение графика функции $y = |x + 5| - 3$ график функции $y = |x|$ нужно сдвинуть по оси x на 5 единиц влево и на 3 единицы вниз по оси y.

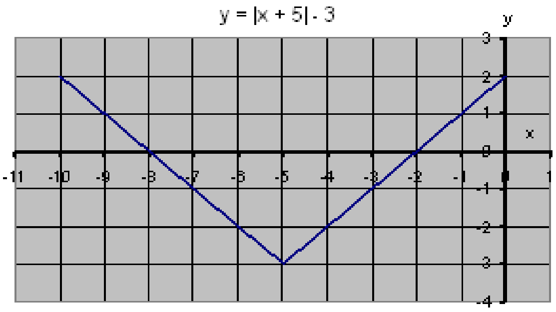
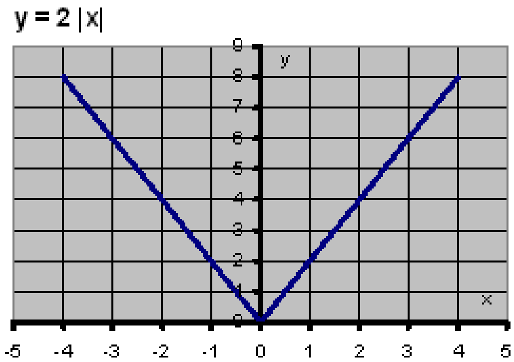
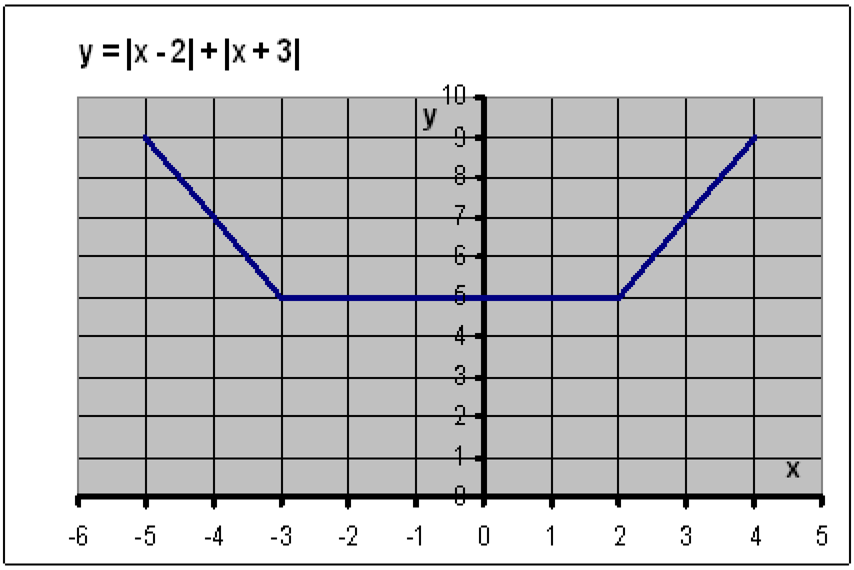


График функции $y = 2|x|$ получается из графика $y = |x|$ растяжением от оси OX в два раза.



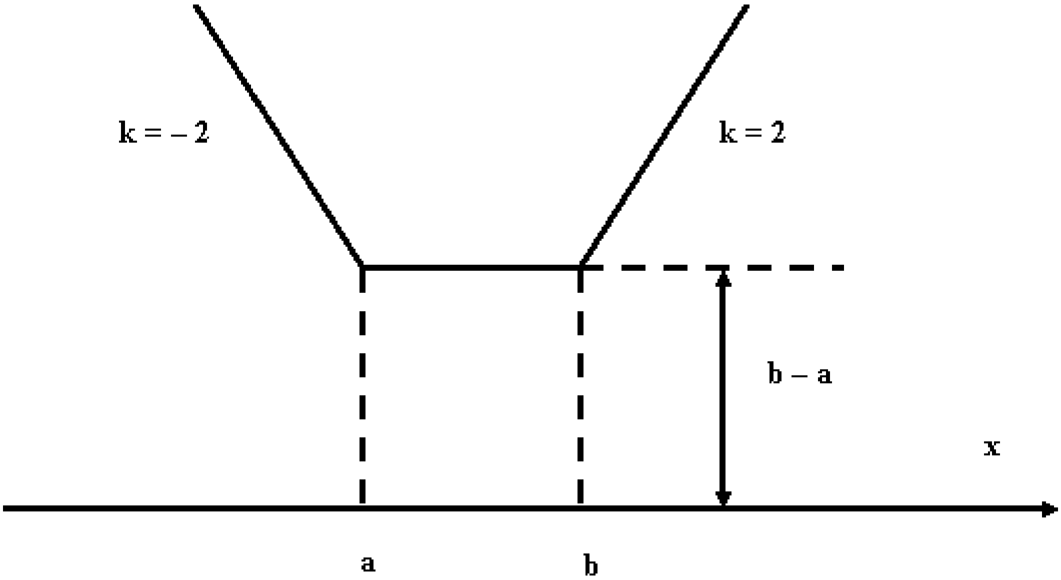
Построить графики функций $y = |x - 2| + |x + 3|$ и $y = |x - 2| - |x + 3|$

Как вы думаете, как построить первый график? (Взять значения и сложить ординаты графиков функций $y = |x - 2|$ и $y = |x + 3|$ соответствующих одним и тем же абсциссам)



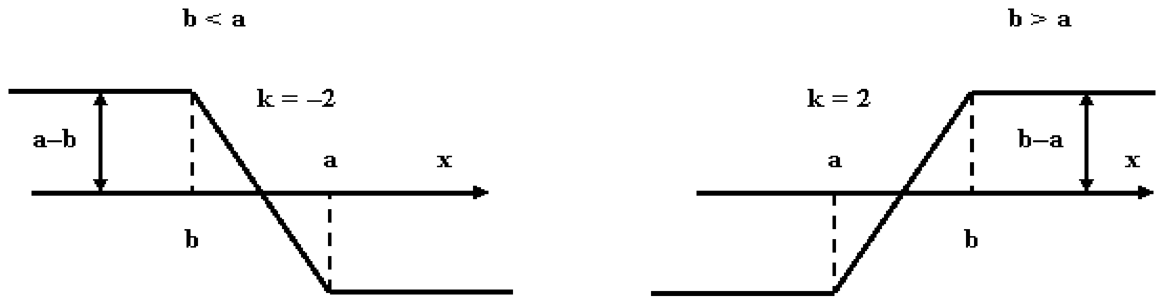
При x = – 3, y = 5 и при x = 2, y = 5. Возьмем еще значения x = – 4, y = 7 и x = 3, y = 7. Поэтому, для построения такого графика достаточно взять значения x = – 3, 2, – 4, 3. То есть значения, при которых каждый из модулей равен 0 и по одному значению больше их или меньше.

Вообще, для построения графика функции y = |x – *a*| + |x – *в*|, достаточно взять значение данной функции в точках *a* и *в* и в точках, меньших или больших *a* и *b*.



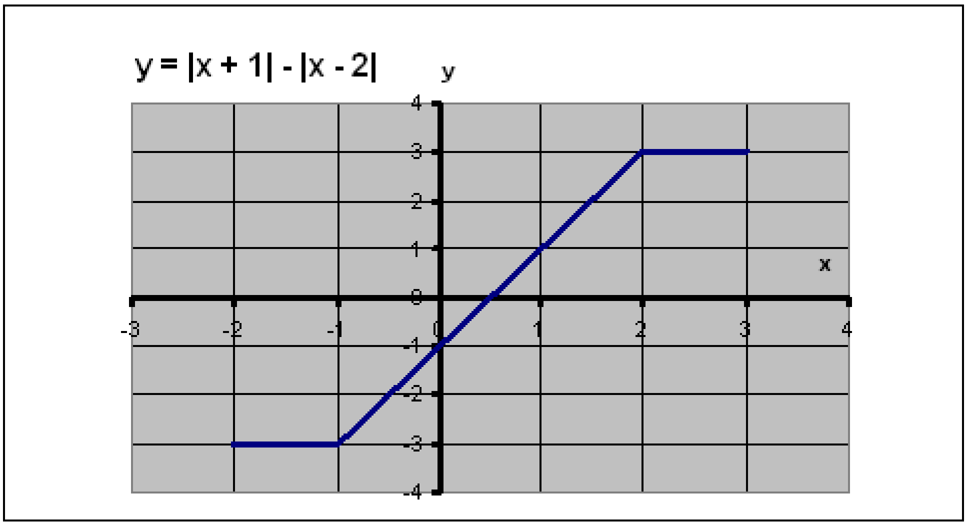
Такой график называется «Корыто»

Таким же способом строится график функции y = |x – *a*| – |x – *в*|.



Такой график называется «ступенька».

Построим график функции y = |x + 1| – |x – 2|



Для закрепления изученного материала, для самостоятельного решения, предлагаю выполнить следующие задания:
Построить графики функций. Выбрать 5 уравнений.

1. **y = |x + 4| – 3**
2. **y = |x| + |x – 3|**
3. **y = |x| – |x – 3|**
4. **y = |x – 2| + 5**
5. **y = |x + 2| + |x – 5|**
6. **y = |x + 2| – |x – 5|**
7. **y = |x + 3| – 4**
8. **y = |x – 3| + |x + 4|**
9. **y = |x + 3| – |x + 4|**

3.Уравнения, содержащие модули.

Систематизация различных видов уравнений и систем с модулем.
Практическое задание: решение уравнений с модулем с выбором рационального способа решения.
Уравнение вида **|f(x)| = g(x)**. По смыслу модуля такое уравнение будет иметь решения, если его правая часть больше или равна нулю, т.е. **g(x) ≥ 0**. Тогда будем иметь:

f(x) = g(x) или **f(x) = -g(x)**.

Примеры:

1) $|2x - 1| = 5x - 10$. Данное уравнение будет иметь корни, если $5x - 10 \geq 0$. Именно с этого и начинают решение таких уравнений.

1. О.Д.З. $5x - 10 \geq 0$

$5x \geq 10$

$x \geq 2$.

2. Решение:

$2x - 1 = 5x - 10$ или $2x - 1 = -(5x - 10)$

$3x = 9$ $\quad$ $7x = 11$

$x = 3$ $\quad$ $x = 11/7$

3. Объединяем О.Д.З. и решение, получаем:

Корень $x = 11/7$ не подходит по О.Д.З., он меньше 2, а $x = 3$ этому условию удовлетворяет.

Ответ: $x = 3$

2) $|x - 1| = 1 - x^2$.

1. О.Д.З. $1 - x^2 \geq 0$. Решим методом интервалов данное неравенство:

$(1 - x)(1 + x) \geq 0$

$-1 \leq x \leq 1$

2. Решение:

$x - 1 = 1 - x^2$ или $x - 1 = -(1 - x^2)$

$x^2 + x - 2 = 0$ $\quad$ $x^2 - x = 0$

$x = -2$ или $x = 1$ $\quad$ $x = 0$ или $x = 1$

3. Объединяем решение и О.Д.З.:

Подходят только корни $x = 1$ и $x = 0$.

Ответ: $x = 0$, $x = 1$.

Уравнение вида **$|f(x)| = |g(x)|$**. Такое уравнение равносильно двум следующим уравнениям **$f(x) = g(x)$** или **$f(x) = -g(x)$**.

Пример:

1) $|x^2 - 5x + 7| = |2x - 5|$. Данное уравнение равносильно двум следующим:

$x^2 - 5x + 7 = 2x - 5$ или $x^2 - 5x + 7 = -2x + 5$

$x^2 – 7x + 12 = 0$ $x^2 – 3x + 2 = 0$

$x = 3$ или $x = 4$ $x = 2$ или $x = 1$

Ответ: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

Уравнения, решаемые **методом подстановки** (замены переменной). Данный метод решения проще всего объяснить на конкретном примере. Так, пусть дано квадратное уравнение с модулем:

$x^2 – 6|x| + 5 = 0$. По свойству модуля $x^2 = |x|^2$, поэтому уравнение можно переписать так:

$|x|^2 – 6|x| + 5 = 0$. Сделаем замену $|x| = t \geq 0$, тогда будем иметь:

$t^2 – 6t + 5 = 0$. Решая данное уравнение, получаем, что $t = 1$ или $t = 5$. Вернемся к замене:

$|x| = 1$ или $|x| = 5$

$x = \pm 1$ $x = \pm 5$

Ответ: $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$.

Рассмотрим еще один пример:

$x^2 + |x| – 2 = 0$. По свойству модуля $x^2 = |x|^2$, поэтому

$|x|^2 + |x| – 2 = 0$. Сделаем замену $|x| = t \geq 0$, тогда:

$t^2 + t – 2 = 0$. Решая данное уравнение, получаем, $t = -2$ или $t = 1$. Вернемся к замене:

$|x| = -2$ или $|x| = 1$

Нет корней $x = \pm 1$

Ответ: $x = -1$, $x = 1$.

Еще один вид уравнений – уравнения со **«сложным»** модулем. К таким уравнениям относятся уравнения, в которых есть «модули в модуле». Уравнения данного вида можно решать, применяя свойства модуля.

Примеры:

1) $|3 – |x|| = 4$. Будем действовать так же, как и в уравнениях второго типа. Т.к. $4 > 0$, то получим два уравнения:

$3 – |x| = 4$ или $3 – |x| = -4$.

Теперь выразим в каждом уравнении модуль x, тогда $|x| = -1$ или $|x| = 7$.

Решаем каждое из полученных уравнений. В первом уравнении нет корней, т.к. $-1 < 0$, а во втором $x = \pm 7$.

Ответ $x = -7$, $x = 7$.

2) |3 + |x + 1|| = 5. Решаем это уравнение аналогичным образом:

3 + |x + 1| = 5   или   3 + |x + 1| = -5

|x + 1| = 2 |x + 1| = -8

x + 1 = 2 или x + 1 = -2.   Нет корней.

x = 1   x = -3

Ответ: x = -3, x = 1.

Наиболее часто используемый способ решения задач с модулем состоит в том, что модуль раскрывается на основании определения. Для этого находим, при каких значениях переменной выражение, стоящее под модулем, неотрицательно, а при каких — отрицательно. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x+3| = 2x-3.$$

Решение. Рассмотрим первый случай $x+3 \geq 0$, то есть $x \geq -3$(выражение под модулем неотрицательно). Уравнение в этом случае принимает вид $x+3 = 2x-3$, его решение $x = 6$. Это решение удовлетворяет условию $x \geq -3$. Таким образом, 6— корень исходного уравнения.

Во втором случае $x+3 < 0$, то есть $x < -3$. В этом случае уравнение преобразуется к виду $-x-3 = 2x-3$, его решение $x = 0$. Этот корень не удовлетворяет условию $x < -3$, таким образом, 0не является корнем исходного уравнения.

Ответ. $\{6\}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|x^2-2x-4| = 3x-2.$$

Решение. Сначала найдем корни уравнения $x^2-2x-4=0$. Это $1 \pm \sqrt{5}$. Следовательно, условие $x^2-2x-4 \geq 0$выполняется при $x \leq 1-\sqrt{5}$и при $x \geq 1+\sqrt{5}$, а условие $x^2-2x-4<0$— при $1-\sqrt{5} < 1+\sqrt{5}$. Рассмотрим два случая:

1) $x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{5}\right] \cup \left[1+\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Исходное уравнение на этом множестве имеет вид $x^2-2x-4 = 3x-2$.

Его корни $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$. Из них только $\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ попадает под наш случай. Докажем это:

$$1-\sqrt{5}<\frac{5-\sqrt{33}}{2}<1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{5}<5-\sqrt{33}<2+2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{5}< -\sqrt{33}< -3+2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{5}>\sqrt{33}>3-2\sqrt{5}.$$

Так как $\sqrt{5}>2$, то $3-2\sqrt{5}<0$, и, действительно, $\sqrt{33}>0>3-2\sqrt{5}$. Для доказательства левой части двойного неравенства возведем его в квадрат (это можно сделать, поскольку обе части неравенства неотрицательны):

$$\sqrt{33}<3+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 33<9+12\sqrt{5}+20.$$

Так как $12\sqrt{5}>4$, последнее неравенство также выполняется, и корень $\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$ — посторонний. Из очевидной цепочки неравенств

$$1+\sqrt{5}<\tfrac{5+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow 2+2\sqrt{5}<5+\sqrt{33} \Leftrightarrow 2\sqrt{5}<3+\sqrt{33} \Leftrightarrow$$

$20<9+6\sqrt{33}+33$следует, что $\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ является корнем уравнения.

2) $x \in \left(1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}\right)$.

В этом случае $x^2-2x-4<0$, и от исходного уравнения мы переходим к уравнению $-x^2+2x+4=3x-2$. Решения этого уравнения: -3и 2. Из них только число 2попадает на указанный промежуток:

$$0<2<1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 1<\sqrt{5},$$
$$-3<1-\sqrt{5} \Leftrightarrow 3>-1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 4>\sqrt{5},$$

корень -3— посторонний.

Ответ. $\left\{2;\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$|x-1|+|x-2|=x+3.$$

Решение. Корни выражений, стоящих под модулем, — 1и 2. Числовая ось разбивается точками 1и 2 на три промежутка, изображенных на рис. 12:

Рис. 12

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $x \geq 2$. Поскольку оба выражения, стоящие под модулем, неотрицательны на рассматриваемом промежутке, исходное уравнение преобразуется к виду $x - 1 + x - 2 = x + 3$. Решение этого уравнения $x = 6$. Этот корень попадает на промежуток $[2, +\infty)$и поэтому является решением исходного уравнения.

2) $1 \leq x < 2$. Поскольку первое выражение, стоящее под модулем, положительно, а второе отрицательно на рассматриваемом промежутке, то исходное уравнение преобразуется к виду $x - 1 + 2 - x = x + 3$. Решение этого уравнения $x = -2$. Поскольку -2не попадает на рассматриваемый промежуток $[1, 2)$, то этот корень --- посторонний.

3) $x < 1$. Поскольку оба выражения, стоящие под модулем, отрицательны на рассматриваемом промежутке, исходное уравнение преобразуется к виду $1 - x + 2 - x = x + 3$. Решение этого уравнения $x = 0$. Этот корень принадлежит промежутку $(-\infty, 1)$и является решением исходного уравнения.

Ответ. $\{0; 6\}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$||x + 3| + x| = 1.$$

Решение. Для решения этого уравнения раскроем модули, начиная с внутреннего. Рассмотрим два случая: **1)** $x \geq -3$и **2)** $x < -3$.

1) В этом случае $|x + 3| = x + 3$, и исходное уравнение преобразуется к виду $|2x + 3| = 1$. Решая это уравнение, получаем корни -2и -1.

2) При $x < -3$раскрываем внутренний модуль: $|x + 3| = -x - 3$. Получаем уравнение $|-3| = 1$, которое решений не имеет.

Ответ. $\{-2; -1\}$.

Пример 5. Решить уравнение

$|x - 3| + |x + 3| = 6.$

Решение. Из геометрических свойств модуля имеем: $|x - 3|$--- это расстояние между точкой xи точкой 3, $|x + 3|$--- расстояние между точкой xи точкой -3. Таким образом, $|x - 3| + |x + 3|$--- это сумма расстояний от точки xдо точек -3и 3. Поскольку расстояние между точками -3и 3равно 6, то любая точка x, лежащая на числовой оси между точками -3и 3, удовлетворяет условию. Точек, лежащих вне отрезка $[-3; 3]$, удовлетворяющих условию, не существует, поскольку
сумма расстояний от этих точек до концов данного отрезка очевидно больше 6.

Ответ. $[-3; 3]$.

Для закрепления изученного материала, для самостоятельного решения, предлагаю выполнить следующие задания:

1. $|x + 8| + |x - 8| = 16$.

2. $|x^2 - 3x| + x = 2$.

3. $\frac{x+1}{|x-1|} - 5\frac{|x-1|}{x+1} + 4 = 0$.

4. $||x+2|+x| = 1$.

4.Неравенства, содержащие модуль.

Классификация различных типов неравенств с модулем и способы их решения. Алгоритмы решения неравенств, содержащих модуль.

Практическая работа: решение неравенств с модулем с выбором рационального способа решения.

1. **|x| ≤ b,** тогда картинка решения выглядит так:

И неравенство с модулем очевидно сводится к системе двух неравенств.

Тут знак может быть и строгим, в этом случае точки на картинке будут «выколотыми».

2. **|x| ≥ b,** тогда картинка решения выглядит так:

И неравенство с модулем очевидно сводится к совокупности двух неравенств.

Тут знак может быть и строгим, в этом случае точки на картинке будут «выколотыми».

Пример 1. Решить неравенство |4 – |x|| ≥ 3.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

[4 – |x| ≤ -3

[4 – |x| ≥ 3.

Хочу напомнить **принципиальное отличие понятия совокупности от понятия системы.** Когда мы ставим знак системы « { », мы подразумеваем, что выполняются и первое и второе неравенства одновременно, то есть мы ищем общие решения двух неравенств. Когда мы ставим знак совокупности « [», мы подразумеваем, что выполняется или первое неравенство, или второе, то есть мы ищем те значения неизвестного х, которые являются решением либо первого, либо второго неравенства.

Теперь решаем систему.

[-|x| ≤ -7

[-|x| ≥ -1,

[|x| ≥ 7

[$|x| \leq 1$.

Решаем отдельно первое неравенство:

[$x \geq 7$

[$x \leq -7$.

Решаем отдельно второе неравенство:

{$x \geq -1$

{$x \leq 1$.

Мы получили совокупность, состоящую из подсовокупности и системы. Решением исходного неравенства будут все x, которые удовлетворяют хотя бы одному неравенству из совокупности и каждому из неравенств системы.

Ответ:

$$x \in (-\infty, -7] \cup [-1, 1] \cup [7, +\infty)$$

Пример 2. Решить неравенство $||x+2| - 3| \leq 2$.

Данное неравенство равносильно следующей системе.

{$|x + 2| - 3 \geq -2$

{$|x + 2| - 3 \leq 2$,

{$|x + 2| \geq 1$

{$|x + 2| \leq 5$.

Решим отдельно первое неравенство системы. Оно эквивалентно следующей совокупности:

[$x + 2 \geq 1$

[$x + 2 \leq -1$,

[$x \geq -1$

[$x \leq -3$.

Решим отдельно второе неравенство системы. Оно эквивалентно следующей системе:

{ $x + 2 \leq 5$

{$x + 2 \geq -5$,

{ $x \leq 3$

{ $x \geq -7$.

Мы получили систему, состоящую из подсистемы и совокупности. Решением исходного неравенства будут все x, которые являются одновременно решением совокупности и решением подсистемы.

Ответ:

$x \in [-7, -3] \cup [-1, 3]$

2) Решение неравенств, используя определение модуля.

Напомню для начала **определение модуля.**

$|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$.

Например, $|34| = 34$, $|-21| = -(-21) = 21$.

Пример 1. Решить неравенство $3|x - 1| \leq x + 3$.

Решение. Используя определение модуля получим две системы:

$\{x - 1 \geq 0$

$\{3(x - 1) \leq x + 3$

и

$\{x - 1 < 0$

$\{-3(x - 1) \leq x + 3$.

Решая первую вторую системы в отдельности, получим:

$\{x \geq 1$

$\{x \leq 3$,

$\{x < 1$

$\{x \geq 0$.

Решением исходного неравенства будут все решения первой системы и все решения второй системы.

Ответ:

$x \in [0, 3]$

3) Решение неравенств методом возведения в квадрат.

Пример 1. Решить неравенство $|x^2 - 1| < |x^2 - x + 1|$.

Решение. Возведем обе части неравенства в квадрат. Замечу, что возводить обе части неравенства в квадрат можно только в том случае, когда они обе положительные. В данном случае у нас и слева и справа стоят модули, поэтому мы можем это сделать.

$(|x^2 – 1|)^2 < (|x^2 – x + 1|)^2$.

Теперь воспользуемся следующим свойством модуля: $(|x|)^2 = x^2$.

$(x^2 – 1)^2 < (x^2 – x + 1)^2$,

$(x^2 – 1)^2 – (x^2 – x + 1)^2 < 0$.

Дальше лучше всего воспользоваться формулой разности квадратов. Можно, конечно и возводить в квадрат левую и правую скобку, но это займет гораздо больше времени.

$(x^2 – 1 – x^2 + x – 1)(x^2 – 1 + x^2 – x + 1) < 0$,

$(x – 2)(2x^2 – x) < 0$,

$x(x – 2)(2x – 1) < 0$.

Решаем методом интервалов.

Ответ:

$x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$

4) Решение неравенств методом замены переменных.

Пример. Решить неравенство $(2x + 3)^2 – |2x + 3| \leq 30$.

Решение. Заметим, что $(2x + 3)^2 = (|2x + 3|)^2$. Тогда получим неравенство

$(|2x + 3|)^2 – |2x + 3| \leq 30$.

Сделаем замену $y = |2x + 3|$.

Перепишем наше неравенство с учетом замены.

$y^2 – y \leq 30$,

$y^2 – y – 30 \leq 0$.

Разложим квадратный трехчлен, стоящий слева, на множители.

$D = 121$,

$y1 = (1 + 11) / 2$,

$y2 = (1 – 11) / 2$,

$y1 = 6$,

$y2 = -5$.

$(y – 6)(y + 5) \leq 0$.

Решим методом интервалов и получим:

$-5 \leq y \leq 6$.

Вернемся к замене:

$-5 \leq |2x + 3| \leq 6$.

Данное двойное неравенство равносильно системе неравенств:

$\{|2x + 3| \leq 6$

$\{|2x + 3| \geq -5$.

Решим каждое из неравенств в отдельности.

Первое равносильно системе

$\{2x + 3 \leq 6$

$\{2x + 3 \geq -6$.

Решим ее.

$\{x \leq 1.5$

$\{x \geq -4.5$.

Второе неравенство очевидно выполняется для всех x, так как модуль по определению число положительное. Так как решение системы – это все x, которые удовлетворяют одновременно и первому и второму неравенству системы, то решением исходной системы будет решение ее первого двойного неравенства (ведь второе верно для всех x).

Ответ:

$x \in [-4.5, 1.5]$

Для закрепления изученного материала, для самостоятельного решения, предлагаю выполнить следующие задания:

1. **1.** $|x| + |x + 3| < 5$.
2. **2.** $1 + x + |x^2 - x - 3| < 0$.
3. **3.** $\left|\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$.

4. 4. $\left|\frac{x+3}{x-27}\right| < 1$.

5. $|3x^2+7x-10| \geq (3x+10)(x-1)$.

6. $|x^2-2x-3| < 3x-3$

7. $|x^2+x-2| + |x+4| \leq x^2+2x+6$